

Optimización geométrica de aliviaderos en tecla de piano para la mejora de su capacidad hidráulica

J. San Mauro^{a1}, F. Salazar^{a2}, F.J. Caballero^{b1,c}, R. Morán^{a,b2}, M. Á. Toledo^{b3}, L. Ruano^d, C. Granell^e

^aCentre Internacional de Mètodes Numèrics en Enginyeria (CIMNE). Universitat Politècnica de Catalunya (UPC). Campus Norte. Edificio C1. C/ Gran Capitán S/N, 08034 Barcelona, España. E-mail: ^{a1}jsanmauro@cimne.upc.edu, ^{a2}fsalazar@cimne.upc.edu

^bDepartamento de Ingeniería Civil: Hidráulica, Energía y Medio Ambiente. Grupo de Investigación en SEguRidad de Presas y Aliviaderos (SERPA). Universidad Politécnica de Madrid (UPM). E.T.S.I. de Caminos, Canales y Puertos. C/ Profesor Aranguren s/n. 28040 Madrid, España. E-mail: ^{b1}franciscojavier.caballero@upm.es, ^{b2}r.moran@upm.es, ^{b3}miguelangel.toledo@upm.es

^cDepartamento de Ingeniería Civil: Hidráulica y ordenación del Territorio. Universidad Politécnica de Madrid (UPM). E.T.S.I. Civil. C/ Alfonso XII 3 y 5. 28014. Madrid, España.

^dVEMSA Polígono Industrial Allenduedero, P-49. Calle Salamanca s/n, 09400 Aranda de Duero (Burgos), España. E-mail: luis@prehorquisa.es

^eJesús Granell Ingenieros Consultores S.A. Calle del Cinca 34, 28002 Madrid, España. E-mail: cgn@jgicsa.es

Línea temática | (iv) Estructuras hidráulicas

RESUMEN

En esta comunicación se expone el estudio realizado para la mejora de la capacidad de desagüe de aliviaderos en tecla de piano mediante la optimización de su diseño geométrico en base a modelación numérica validada físicamente. Se muestra para un cierto diseño base de aliviadero en tecla de piano, el patrón de flujo que induce la geometría y su influencia en la capacidad de desagüe. Se observó una reconducción del flujo por los voladizos del aliviadero, lo que provoca zonas de baja velocidad y concentración de líneas de corriente, dificultando el desagüe. Una vez estudiado el patrón flujo se procedió al rediseño de la geometría del aliviadero, en base a la detección en el modelo numérico de las zonas de baja velocidad inducidas por el contorno geométrico. La nueva geometría de aliviadero optimizada se modeló numéricamente, observándose un aumento de la capacidad de desagüe respecto a la geometría base.

Palabras clave | Aliviadero; presa; PKW; laberinto; CFD.

INTRODUCCIÓN

La actualización de aliviaderos de presas ya existentes para adaptarse a las actuales normativas de seguridad y a los desafíos del cambio climático suele enfrentarse a condicionantes geométricos, topográficos y presupuestarios. En este marco cobran especial interés los diseños no convencionales de aliviaderos, que permiten aumentar la capacidad de desagüe con una menor inversión que con soluciones de aliviaderos tradicionales.

Uno de los condicionantes geométricos más habituales suele ser la limitación de la anchura máxima disponible para la ampliación de un aliviadero. Ante esta situación una solución innovadora es la implementación de un aliviadero en laberinto, que permite aumentar la capacidad de desagüe frente a un aliviadero recto tradicional de la misma anchura, manteniendo la simplicidad de operación del vertido libre. Los aliviaderos en laberinto se caracterizan por presentar una forma en planta quebrada y modular, lo que conduce a un aumento importante de la longitud de vertido. Su capacidad de desagüe viene

determinada por la ecuación (1), que relaciona el caudal de vertido con un coeficiente de desagüe (C_d), que resulta específico para cada geometría de aliviadero (Crookston y Tullis, 2013).

$$Q = L \cdot C_d \cdot H_t^{1.5} \quad (1)$$

Donde:

Q es el caudal de vertido (m^3/s).

L es la longitud del aliviadero desarrollado (m).

C_d es el coeficiente de desagüe.

H_t es la carga hidráulica sobre el umbral del vertedero (m).

Soluciones de aliviaderos en laberinto ya han sido proyectadas tanto a nivel nacional (Presa de María Cristina, Cordero et al., 2007) como internacional (Lago Brazos, EE.UU., Vasquez et al., 2007), revelándose como una de sus limitaciones fundamentales la ocupación de más espacio en planta que un vertedero recto tradicional, lo que dificulta su implementación en determinados casos.

Para soslayar esta limitación en los últimos años se ha desarrollado una nueva subtipología dentro de los aliviaderos en laberinto, los denominados aliviaderos en tecla de piano (Figura 1), que se caracterizan por ser laberintos formados por módulos rectangulares, que pueden incorporar voladizos tanto hacia aguas arriba como hacia aguas abajo, como hacia ambas direcciones, para así maximizar la longitud del labio de vertido con una superficie en la base de apoyo del aliviadero reducida, como por ejemplo sucede en las crestas de las presas de hormigón.



Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

Figura 1 | Izquierda: aliviadero tipo laberinto en el lago Brazos, Texas, EE.UU (Fuente: Freese and Nichols, 2019). Derecha: aliviadero en tecla de piano en la presa de Malarce, Francia (Fuente: Lempérière, 2017).

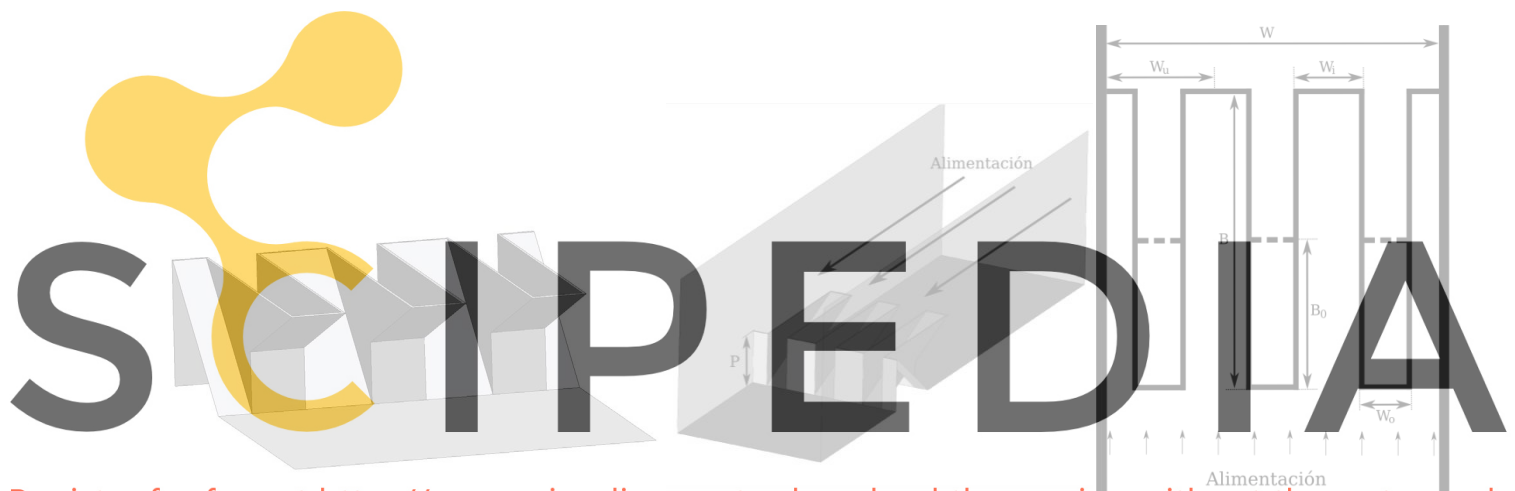
En los últimos años estos aliviaderos han experimentado un desarrollo notable, construyéndose un número importante de ellos, fundamentalmente en presas hidroeléctricas en Francia (Laugier et al., 2011). La capacidad de desagüe de los aliviaderos en tecla de piano también viene determinada por la ecuación (1), al ser un caso particular de aliviadero en laberinto. Si bien el coeficiente de desagüe (C_d) es específico para cada geometría de tecla de piano. Existen ciertas formulaciones empíricas para su obtención, dentro de ciertos rangos geométricos e hidráulicos (Machiels, 2012), fuera de los cuales se debe recurrir a la modelación física o numérica. Por su elevada capacidad de evacuación para sobreelaciones de lámina vertiente reducidas estos aliviaderos se han posicionado como una solución ventajosa, sin embargo conforme aumenta el espesor de lámina de vertido pierden parte de su eficacia hidráulica (Anderson y Tullis, 2013), siendo esta su principal debilidad.

En esta comunicación se propone la modificación de la geometría de voladizos como método para el aumento de capacidad de vertido de un aliviadero en tecla de piano para láminas de vertido significativas, tomando como base para el rediseño geométrico resultados de modelación numérica validados mediante ensayo físico. Posteriormente se compara la capacidad de desagüe de la nueva geometría optimizada frente a la inicial.

METODOLOGÍA

Geometría base

En este trabajo se ha tomado como geometría base de aliviadero en tecla de piano un diseño con voladizos únicamente aguas arriba y las siguientes relaciones de parámetros geométricos $B=0,5$ m, $B_0=0,25$ m, $W=0,591$, $W_i/W_0=1,4$, $P=0,2$, $L/W=6,1$ y $P/W_u=1$, según se ilustra en la Figura 2 (L representa la longitud desarrollada del umbral del aliviadero). Estas relaciones de parámetros se seleccionaron atendiendo a las recomendaciones de la literatura técnica (Lempérière, 2011) y a los requerimientos planteados en el proyecto de investigación COFRE “Diseño industrial de una compuerta fusible recuperable para la mejora de la seguridad hidrológica de las presas”, marco en el cual se ha desarrollado la investigación que se expone en esta comunicación. Esta geometría se modeló numéricamente y se ensayó físicamente con posterioridad, para así validar el modelo numérico.



Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

Figura 2 | Aliviadero en tecla de piano base. Izquierda: perspectiva desde aguas arriba. Centro: perspectiva desde aguas abajo. Derecha: vista en planta donde se indican los parámetros geométricos fundamentales.

Modelo numérico

El código de cálculo utilizado en este trabajo está integrado dentro del entorno Open Source Kratos-MultiPhysics (Kratos, 2012). El código discretiza las ecuaciones completas de Navier-Stokes para flujo incompresible en 3D según una formulación Euleriana de elementos finitos, realiza una integración temporal mediante una versión semiexplícita del método de pasos fraccionados, y utiliza el método Level-Set para la definición de la posición de la superficie libre (Dadvand et al., 2010; Rossi et al., 2013). El programa tiene implementada una Estabilización de Subescalas Ortogonales (Codina, 2000), que permite modelar la turbulencia sin un modelo específico para tal efecto (Príncipe et al., 2010). Este código numérico ha sido previamente utilizado con éxito en la simulación de aliviaderos en laberinto (Salazar et al., 2015, San Mauro et al., 2016) y regulados con compuertas (Salazar et al., 2013). Todas las simulaciones numéricas que se muestran en esta comunicación se llevaron a cabo con una malla de elementos finitos tetraédricos lineales 3D.

Utilizando el código numérico expuesto se llevaron a cabo sobre el aliviadero en tecla de piano base la simulación de 11 caudales de vertido comprendidos entre los 50 y 150 l/s. A partir de las simulaciones realizadas se obtuvo la curva de desagüe del aliviadero para su posterior validación frente a modelo físico. También se estudiaron los campos de velocidades y líneas de corriente inducidas por el contorno del aliviadero en el fluido.

Ensayo físico

Los ensayos físicos del aliviadero en tecla de piano base se realizaron en el Centro de Estudios Hidrográficos del CEDEX. En concreto se empleó un canal de solera horizontal y sección rectangular de un 1 m de ancho. Se ensayó el aliviadero base para caudales de vertido entre 0 y 150 l/s, y se obtuvo para cada uno de los ensayos el calado aguas arriba del aliviadero mediante limnímetros manuales. Las medidas se efectuaron lo suficientemente alejadas del vertedero ensayado como para evitar afecciones locales a la lámina de agua. En la Figura 3 se muestra la instalación de ensayo y el vertido sobre el aliviadero en tecla de piano para 2 caudales de vertido.

A partir de los datos recogidos de calado aguas arriba del aliviadero y caudal de ensayo se obtuvo la curva de desagüe del ensayo físico, la cual fue comparada con la obtenida previamente por simulación numérica, para así validar el modelo numérico empleado.



Figura 3 | Superior: vista del canal de ensayo desde aguas arriba del aliviadero. Inferior: ensayos de vertido sobre el aliviadero en tecla de piano base. Izquierda 32 l/s. Derecha: 74 l/s.

Obtención de la geometría optimizada

Tras la validación del modelo numérico y el estudio de campos de velocidades y líneas de corriente inducidas se procedió a modificar la geometría del aliviadero mediante la incorporación de perfiles hidrodinámicos en la cara vertical inferior de los voladizos de aguas arriba (Figura 4). El objetivo a la hora de definir esas formas hidrodinámicas fue eliminar las zonas de baja velocidad entorno al pie del aliviadero para así favorecer la eficiencia hidráulica.

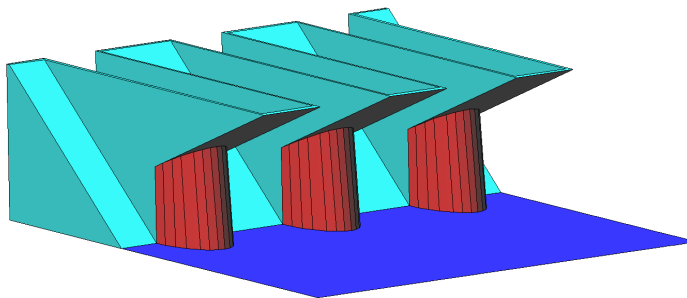


Figura 4 | Esquema de geometría de aliviadero optimizada con apéndices hidrodinámicos indicados en rojo.

El procedimiento adoptado para obtener los perfiles hidrodinámicos indicados a partir de los resultados del modelo numérico fue el siguiente:

- 1.- Definir la isosuperficie de velocidad tangente a las caras laterales de los voladizos de aguas arriba.
- 2.- Realizar 2 secciones a las isosuperficies paralelas a la solera y equiespaciadas, obteniendo 2 isolíneas tangentes a los módulos de los voladizos.
- 3.- Ajustar una curva cónica regular (semielipse) a las isolíneas de velocidad obtenidas en el paso anterior.
- 4.- Definición de un semicilindro de eje oblicuo y planta elíptica a partir de las semielipses obtenidas en el paso anterior. El semicilindro así definido será el perfil hidrodinámico a adoptar.

Una vez obtenida la geometría optimizada con los perfiles hidrodinámicos, según el procedimiento descrito, se realizó su simulación numérica para 7 caudales de vertido entre 50 y 150 l/s, para así comparar los nuevos patrones de flujo y capacidad de desagüe con los del aliviadero base.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Validación del modelo numérico en base a ensayos físicos

La validación del modelo numérico se llevó a cabo mediante el procedimiento de ensayo ciego, es decir, en primer lugar se realizaron las simulaciones numéricas y se obtuvo la curva de desagüe a partir de sus resultados. Posteriormente se realizaron los ensayos en modelo físico obteniendo también su curva de desagüe. Finalmente se compararon ambas curvas (Figura 5). Se observó que la máxima discrepancia entre resultados físicos y numéricos fue del 14,5% y la discrepancia media del 10,7%, siendo este un rango similar de discrepancia que el obtenido por otros autores mediante ajuste de formulaciones empíricas (Machiels, 2012).

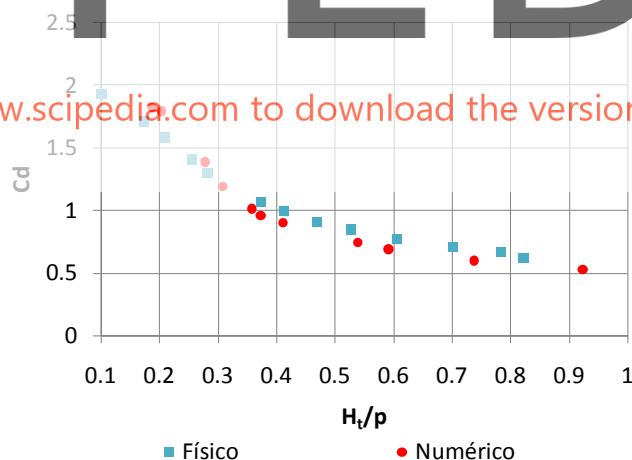


Figura 5 | Coeficiente de desagüe. Comparación de resultados numéricos y de ensayo físico en laboratorio. C_d coeficiente de desagüe. H_t carga hidráulica sobre el umbral del vertedero. P altura del umbral de vertido sobre la solera.

Campo de velocidades en geometría base

Se estudiaron los campos de velocidades tanto en secciones longitudinales como transversales, observándose la aparición de ciertas zonas de baja velocidad.

En concreto al observar el campo de velocidades en una sección longitudinal al aliviadero, por el eje de uno de sus voladizos hacia aguas arriba, se detectó la aparición de una clara zona de baja velocidad, que comienza en la zona más inferior del voladizo y se prolonga hasta la solera por el paramento vertical de aliviadero. Esta zona de baja velocidad se aprecia para todos los caudales simulados. En la Figura 6 se muestra un ejemplo para caudal de vertido 100 l/s.

También se apreciaron zonas de baja velocidad al estudiar 3 secciones transversales para todos los modelos realizados. Se observó que estas zonas de baja velocidad aparecían en la sección de más aguas abajo de las 3 estudiadas (S_{75}), presentando una forma semicircular a cada lado de los paramentos laterales de los voladizos. En la Figura 7 se ilustra este comportamiento en la S_{75} para el modelo de caudal de vertido 100 l/s. Estas zonas de baja velocidad se estima que dificultarán la circulación del agua hacia aguas abajo al crearse un cuello de botella que reduce la capacidad de desagüe del aliviadero.



Figura 6 | Izquierda: esquema del plano longitudinal para el estudio del campo de velocidades. Derecha: campo de velocidades en sección longitudinal en simulación con caudal de vertido 100 l/s. La línea magenta indica la posición de la superficie libre.

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

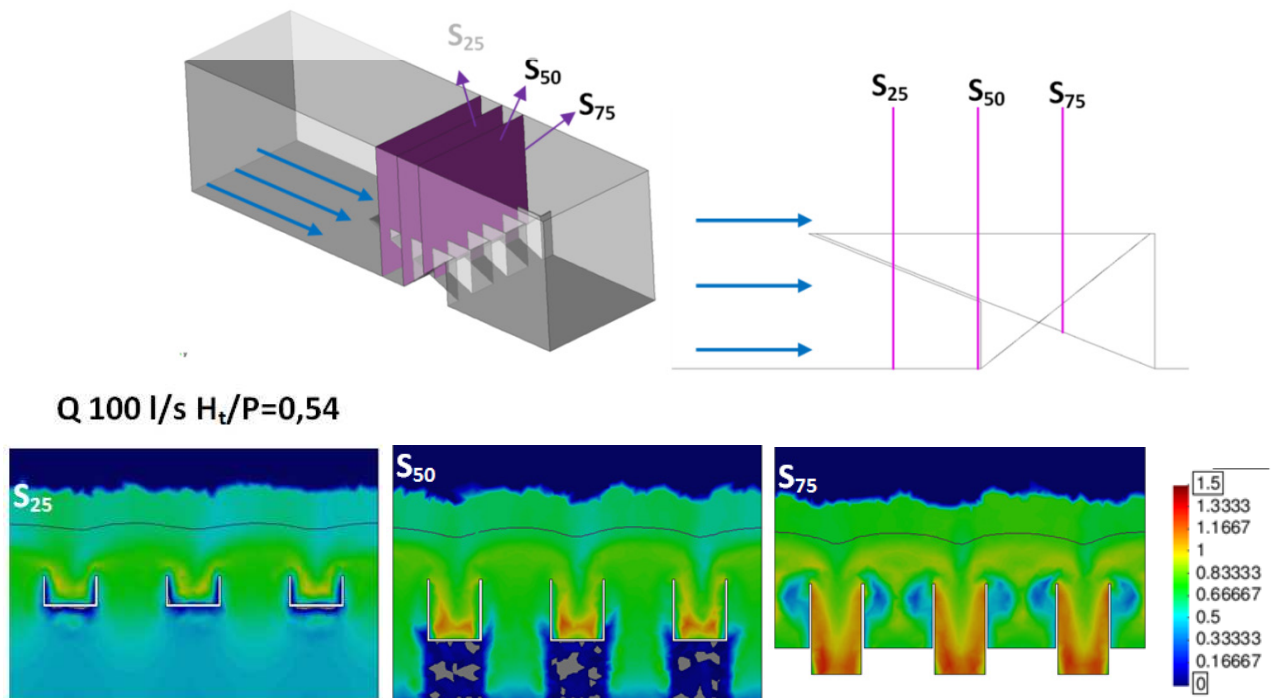


Figura 7 | Superior: esquema de planos longitudinales para el estudio de campo de velocidades. Inferior: campos de velocidades en secciones transversales en simulación con caudal de vertido 100 l/s. La línea magenta indica la posición de la superficie libre.

Líneas de corriente en geometría base

En los aliviaderos en tecla de piano existen 2 tipos de flujos, uno superficial en torno a la superficie libre y un segundo flujo profundo e inducido por la geometría de los paramentos del aliviadero en tecla de piano (Machiels et al., 2011). En consecuencia se estudió la forma de las líneas de corriente del modelo numérico tanto en las proximidades de la superficie libre como en el interior del fluido.

Al observar las líneas de corriente superficiales se apreció que conforme aumenta el caudal de vertido las líneas de corriente dejan de intentar adaptar su dirección a la forma del labio de vertido. En la Figura 8 se ilustra este fenómeno para las simulaciones de caudal 100 l/s y 150 l/s. Este comportamiento de curvado de líneas de corriente superficial es característico de los aliviaderos en laberinto y está relacionado con la disminución de la capacidad de desagüe al aumentar el caudal vertido (Salazar et al., 2015).

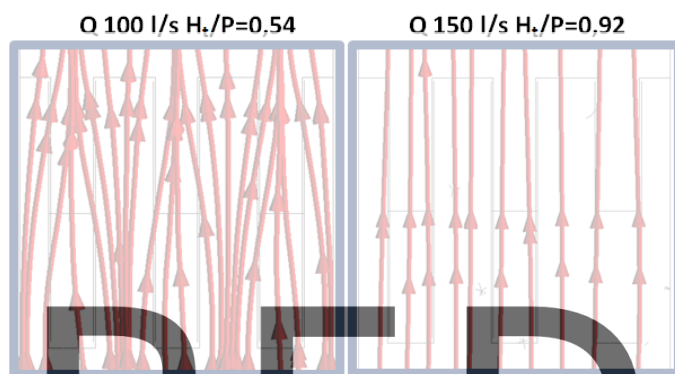


Figura 8 | Vista en planta de líneas de corriente en la superficie libre. Ejemplos para simulaciones con caudal de vertido 100 l/s y 150 l/s.

En cuanto al flujo en el interior del fluido (flujo profundo) se observó que se producía una marcada concentración de las líneas de corriente en las zonas entre voladizos, para posteriormente expandirse lateralmente en la zona de más aguas abajo (Figura 9) e superficialmente (Figura 10).

También se observó que el agua que circula próxima al contorno del voladizo se ve reconducida por la propia geometría del aliviadero, y se vierte uniformemente a lo largo del labio lateral de la tecla (Figura 10). Esta reconducción del flujo en torno a los voladizos ocupa una parte de la sección de la tecla, lo que está en relación con la fuerte contracción de las líneas de corriente observada en el espacio entre voladizos. La reconducción del flujo alrededor de los voladizos produce una reducción de la velocidad del agua, que está en relación con las zonas de baja velocidad observadas en la sección transversal S_{75} , expuesta en el epígrafe anterior. La región existente entre estas zonas de baja velocidad es donde se ha observado que se concentran las líneas de corriente entre voladizos (Figura 11). Por lo expuesto anteriormente se relacionan y justifican las zonas de baja velocidad observadas anteriormente en las secciones longitudinales y transversales, a partir de la reconducción de las líneas de corriente profundas por los voladizos y el paramento vertical que existe bajo ellos.

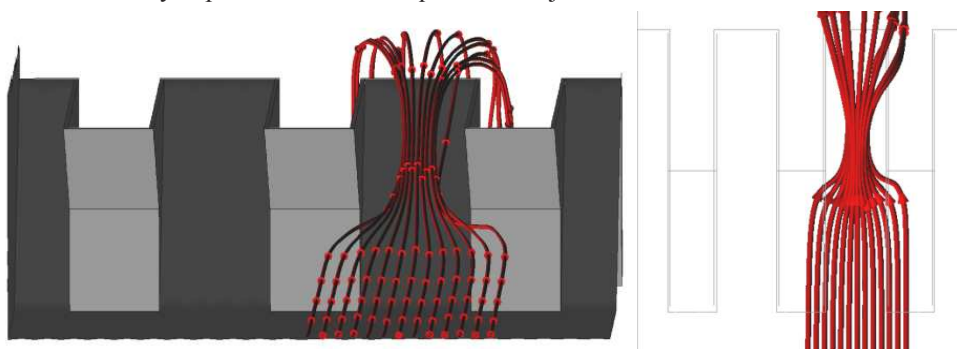


Figura 9 | Líneas de corriente profundas entre voladizos, modelo con caudal de vertido 100 l/s. Izquierda: Perspectiva. Derecha: vista en planta.

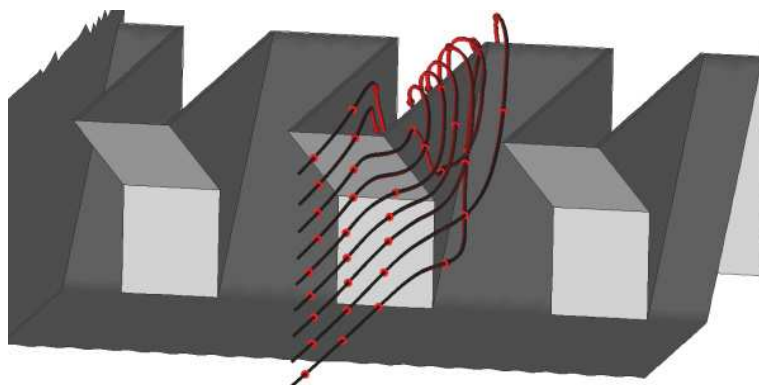


Figura 10 | Perspectiva de líneas de corriente en torno al voladizo de modelo con caudal de vertido 100 l/s.

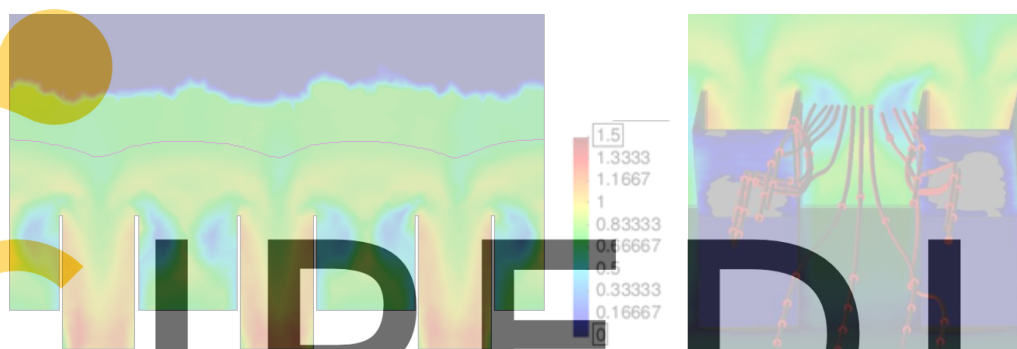


Figura 11 | Modelo con caudal de vertido 100 l/s. Izquierda: detalle de campo de velocidades en sección transversal S_{75} . Derecha: líneas de corriente que atraviesan la sección S_{75} .

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

La optimización de la geometría del aliviadero en tecla de piano base consistió en añadir perfiles hidrodinámicos en la cara vertical inferior de los voladizos de aguas arriba, según el procedimiento expuesto en la metodología, para así tratar de eliminar la zona de baja velocidad observada en esa región. Aunque también se observaron otras zonas de baja velocidad en la zona entre voladizos se decidió no modificar la geometría de esa zona, ya que podría suponer un obstáculo para el desagüe de caudales asociados a pequeñas láminas de vertido.

El diseño de los perfiles hidrodinámicos se basó en la observación de los resultados obtenidos para el modelo numérico con caudal de vertido 100 l/s y $H_t/P=0,54$. El motivo de elegir esta simulación para el diseño se debió a que resulta ser un valor intermedio de entre los modelados de H_t/P (carga hidráulica adimensional). En los modelos con baja relación H_t/P el flujo profundo puede no estar completamente desarrollado, mientras que para relaciones altas de H_t/P el flujo predominante pasa a ser el superficial, con lo que las formas de los pies de las teclas de salida tienen una limitada repercusión en la eficiencia del aliviadero.

La geometría de los perfiles hidrodinámicos se obtuvo de la siguiente forma:

- 1.- Se definió la isosuperficie de velocidad inferior a 0,4 m/s, por ser tangente a las caras laterales de los voladizos (marcado en rojo en la Figura 12 izquierda).
- 2.- Se realizaron 2 secciones a la isosuperficie paralelas a la solera a 0,03 y 0,06 m de altura, obteniendo así las zonas de velocidad inferior a 0,4 m/s entorno al pie vertical de la tecla de salida en ambas secciones (Figura 12 derecha).

3.- Se ajustó una semielipse en torno a las zonas de velocidad inferior a 0,4 m/s obtenidas en la sección horizontal a 0,06 m de altura. De la misma manera se ajustó otra semielipse para las zonas de la sección horizontal a 0,03 m (se indican con líneas discontinuas en Figura 12 derecha).

4.- Finalmente se definió un semicilindro de eje oblicuo y planta elíptica que contuviera las semielipses obtenidas en el paso anterior. Resultando así la geometría final buscada (Figura 13).

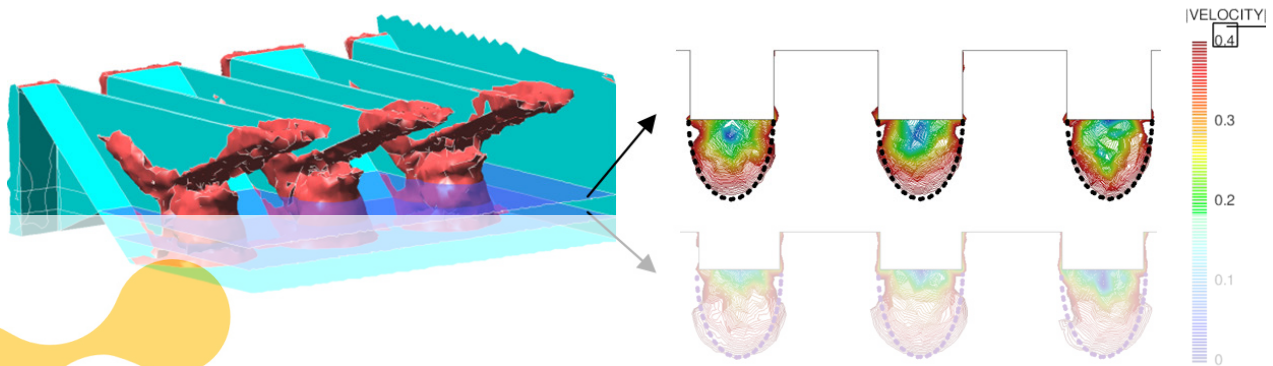


Figura 12 | Resultados de simulación de geometría base con caudal de vertido 100 l/s y $H/P=0,54$. Izquierda: Perspectiva, se indica en rojo la isosuperficie de velocidad inferior a 0,4 m/s, promediada en 5s. Se indica en azul las secciones paralelas a la solera a 0,03 y 0,06 m. Derecha: vista en planta de las secciones paralelas a la solera donde se indican las zonas de velocidad inferior a 0,4 m/s en torno a los paramentos verticales y el ajuste de semielipses con líneas discontinuas.



Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

Figura 13 | Izquierda: Aliviadero base. Derecha: Aliviadero optimizado con perfiles hidrodinámicos.

Comparación de resultados entre geometrías

En este apartado se comparan en primer lugar las líneas de corriente profundas que se producen para la geometría base y para la optimizada con perfiles hidrodinámicos.

En la Figura 14 se muestra un ejemplo de la disposición de las líneas de corriente en torno a los voladizos, observándose que en la geometría base el agua que circula por debajo del umbral es reconducida ocupando parte del espacio entre voladizos. Sin embargo en la geometría optimizada se aprecia cómo las líneas de corriente se adaptan de manera más ajustada a los contornos, liberando espacio de la zona entre voladizos.

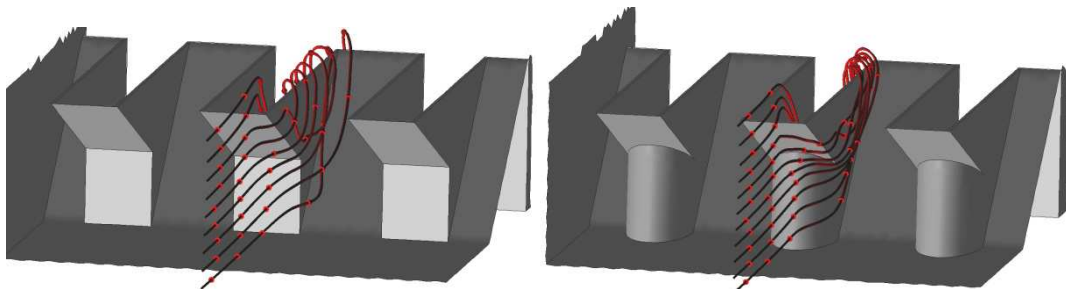


Figura 14 | Perspectiva de líneas de corriente en torno a voladizo en modelos con caudal de vertido 100 l/s. Izquierda: geometría básica. Derecha: Geometría optimizada.

En la Figura 15 se muestra un ejemplo de líneas de corriente en las zonas entre voladizos. Para la geometría base se produce una marcada concentración de las líneas de corriente. En la geometría optimizada las líneas de corriente son reconducidas por los perfiles hidrodinámicos y no se produce contracción significativa, aprovechando así todo el ancho útil entre voladizos. Al eliminarse la contracción de las líneas de corriente también se elimina la zona de baja velocidad detectada en el espacio entre voladizos al estudiar la geometría base (Figura 16).

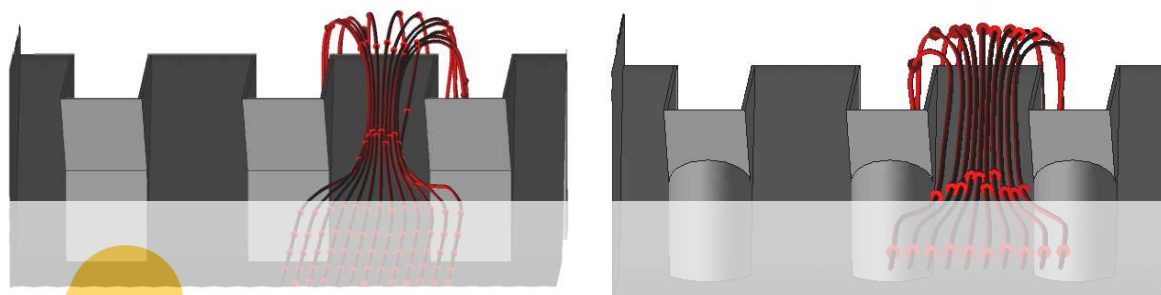


Figura 15 | Líneas de corriente en la zona entre voladizos con caudal de vertido 100 l/s. Izquierda: geometría básica. Derecha: Geometría optimizada.

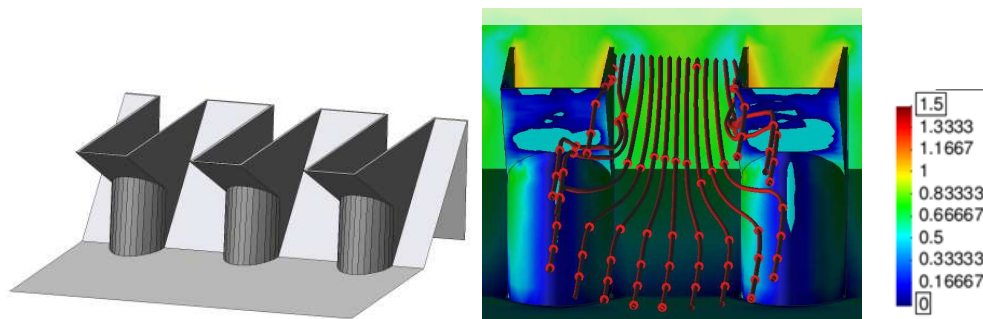


Figura 16 | Vista desde aguas arriba de líneas de corriente que atraviesan la sección S_{75} , caudal de vertido 100 l/s. Superior: geometría base. Inferior: Geometría optimizada.

Finalmente se compararon las curvas de capacidad de desagüe de la geometría base y optimizada (Figura 17), observándose que el nuevo diseño mejora la capacidad de vertido del aliviadero base en todo el rango estudiado, variando entre una mejora máxima de C_d del 22,2% para relaciones de H/p bajas hasta casi converger con la geometría base para relaciones de H/p altas.

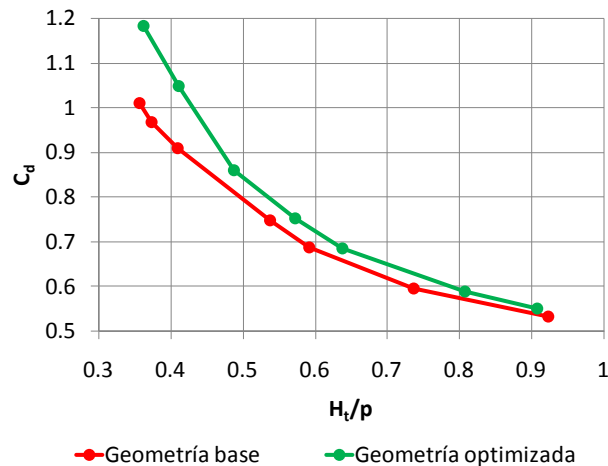


Figura 17 | Comparación de la capacidad de desagüe obtenida para la geometría básica y la optimizada. C_d coeficiente de desagüe. H_t carga hidráulica sobre el umbral del vertedero. P altura del umbral de vertido sobre la solera.

CONCLUSIONES

A la vista de los resultados expuestos en esta comunicación se pone de manifiesto cómo la inclusión de perfiles hidrodinámicos en el pie de los voladizos de aguas arriba de un aliviadero en tecla de piano permite aumentar la capacidad de desagüe respecto una geometría de aliviadero en tecla de piano con geometría clásica. La inclusión de perfiles hidrodinámicos elimina la concentración de líneas de corriente entre voladizos que se produce con los diseños clásicos, reduciendo así las zonas de baja velocidad y aumentando la capacidad de desagüe para una misma lámina de vertido. Sin embargo la implementación de perfiles hidrodinámicos también aumentará la complejidad del encofrado de construcción, así como incrementará la ocupación de espacio en planta del aliviadero, lo que se debe tener en cuenta a la hora de implementar esta solución en emplazamientos de difícil acceso o espacio disponible muy reducido.

Así mismo se ha mostrado la utilidad del uso de un modelo numérico para la identificación de patrones de flujo y la optimización del diseño geométrico de un aliviadero en tecla de piano, proponiéndose un procedimiento para la obtención de la geometría de los perfiles hidrodinámicos en un caso general en base a resultados numéricos.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su agradecimiento al Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades por su apoyo en la financiación del proyecto: “COFRE- Diseño industrial de una compuerta fusible recuperable para la mejora de la seguridad hidrológica de las presas”. Programa Estatal de Investigación, Desarrollo e Innovación Orientada a los Retos de la Sociedad (RTC-2017-6417-5), así como el apoyo económico a CIMNE vía el programa CERCA de la Generalitat de Cataluña.. También se desea agradecer el apoyo prestado por Cristian Ponce y Tamara Ramos.

REFERENCIAS

- Anderson, R.M., Tullis, B.P. 2013. Piano Key Weir hydraulics and labyrinth weir comparison”. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*. 139(3), 246–253.
- Codina R. 2000 Stabilization of incompressibility and convection through orthogonal sub-scales in finite element method. *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering*. 190:1579–1599.

- Cordero, D., Elviro, V. y Granell, C. 2007. Aliviaderos en laberinto: presa de María Cristina. *Revista de Ingeniería Civil*. ISSN: 0213-8468, N° 146, 2007, 5-20.
- Crookston, B.M., Tullis, B.P. 2013. Hydraulic design and analysis of labyrinth weirs. I: Discharge relationships. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering* 139(5), 363-370.
- Dadvand, P., Rossi, R., Oñate, E. 2010. An object-oriented environment for developing finite element codes for multi-disciplinary applications. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 17, 253-297.
- Freese and Nichols. 2019. <https://www.freese.com/our-work/lake-brazos-labyrinth-weir>
- Kratos, multiphysics opensource FEM code, 2012. (Available from: <http://www.cimne.com/kratos>)
- Laugier F., Vermeulen J., Lefebvre V. 2011. Overview of Piano Key Weirs experience developed at EDF during the past few years. *Labyrinth and piano key weirs-PKW 2011*. S. Erpicum, F. Laugier, J. Boillat, M. Pirotton, B. Reverchon and A. J. Schleiss, eds. CRC Press, London, 213-227.
- Lempérière, F. 2011. *New labyrinth weirs triple the spillways discharge*. Water and Energy International, 68(11), 77-78.
- Lempérière, F. 2017. Dams and floods. *Engineering*, 3(1), 144-149.
- Machiels, O., Erpicum, S., Dewals, B. J., Archambeau, P., Pirotton, M. 2011. *Experimental observation of flow characteristics over a Piano Key Weir*. Journal of hydraulic research, 49(3), 359-366.
- Machiels, O. 2012. Experimental study of the hydraulic behaviour of Piano Key weirs. PhD thesis. HECE Research Unit, University of Liège, Belgium.
- Príncipe J, Codina R, Henke F. 2010. The dissipative structure of variational multiscale methods for incompressible flows. *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering*. 199: 791-801.
- Rossi, R., Larese, A., Dadvand, P. y Oñate, E. 2013. An efficient edge-based level set finite element method for free surface flow problems. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 71, 687–716.
- Salazar, F., Morán, R., Rossi, R., & Oñate, E. 2013. Analysis of the discharge capacity of radial-gated spillways using CFD and ANN–Oliana Dam case study. *Journal of Hydraulic Research*, 51(3), 244-252.
- Salazar, F., San Mauro, J., Oñate, E. and Toledo, M.A. 2015. CFD analysis of flow pattern in labyrinth weirs. *Dam Protections against Overtopping and Accidental Leakage*. CRC BALKEMA.
- San Mauro, L., Salazar, F., Toledo, M. A., Caballero, F. J., Ponce-Farfán, C., Ramos, T. 2016. *Modelación física y numérica de aliviaderos en laberinto con fondo poliédrico*. Ingeniería del Agua, 20(3), 127-138.
- Vasquez, V., Boyd, M., Wolfhope, J., and Garret, R. 2007. A labyrinth rises in the heart of Texas. *Proc., 28th Annual USSD Conf., USSD, Denver, CO*, 813–826.